Einführung in die Stringtheorie

Übung, Blatt 1 **SS 06 21.04.06**

[P1] Kompakte Extradimensionen

Die in der Stringtheorie auftretenden Extradimensionen müssen im Gegensatz zu den beobachteten (unendlich) ausgedehnten drei Raumdimensionen kompakt sein.[1] Im Wesentlichen bedeutet das, dass diese Extradimensionen „klein“ also beschränkt sind und daher bisher noch nicht beobachtet werden konnten.

Der Kreis ist ein Beispiel für einen eindimensionalen kompakten Raum. Dieser kann mittels einer reellen Koordinate $x \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden, wenn zusätzlich folgende Identifikation berücksichtigt wird:

$$x \sim x + 2\pi R\, n \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

Der Koordinatenbereich $0 \leq x < 2\pi R$ ist ein sogenannter *Fundamentalbereich* der obigen Äquivalenzrelation. D.h. dieser Koordinatenbereich erfüllt folgende Bedingungen:

(i) Keine zwei Punkte werden miteinander identifiziert.

(ii) Jeder Punkt des Raumes steht in Beziehung mit einem Punkt des Fundamentalbereiches.

Betrachten Sie nun einen Raum, der mit zwei reellen Koordinaten (x, y) parametrisiert wird, wobei folgende Identifikation gilt:

$$(x, y) \sim (x + 2\pi R, y + 2\pi R) \ .$$

(a) Zeichnen Sie den Fundamentalbereich und versuchen Sie den resultierenden Raum graphisch zu bestimmen. (b) Finden Sie geschickte neue Koordinaten, sodass der resultierende Raum offensichtlich ist.

[P2] „Large extra dimensions“ & Planck-Länge

Die Newtonsche Gravitation ist hinreichend um fundamentale Größen wie die *Planck-Länge* in diversen Dimensionen zu definieren. Die drei fundamentalen Naturkonstanten G (Newtonsche Gravitationskonstante), c (Lichtgeschwindigkeit) und $\hbar$ (Plancksches Wirkungsquantum) sind in vier Raumzeit-Dimensionen wie folgt bestimmt worden:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\ , \quad c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ , \quad \hbar = 1.06 \cdot 10^{-34}\ \frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}} \quad .$$

[1] Es gibt auch Betrachtungen mit nicht-kompakten Extradimension. Diese sollen aber hier keine Rolle spielen.

(a) Bestimmen Sie zuerst, ausgehend von der Newtonschen Gleichung für das Gravitationspotenzial $\phi_g^{(D)}$ in D Dimensionen,

$$\triangle\phi_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)}\rho_m \quad ,$$

die Einheit/Dimension der D-dimensionalen Gravitationskonstante $G^{(D)}$ relativ zur Gravitationskonstante in $D = 4$ Dimensionen, also $[G]$. Beachten Sie, dass das Potenzial immer die selbe Einheit/Dimension hat:

$$[\phi_g^{(D)}] = \frac{[Energie]}{[Masse]}.$$

Im Plancksche Einheitensystem werden die drei Basiseinheiten *Länge*, *Zeit* und *Masse* so gewählt, dass die obigen drei fundamentalen Naturkonstanten den Wert eins annehmen, also in $D = 4$:

$$G = 1 \cdot \frac{\ell_\mathrm{P}^3}{m_\mathrm{P}\ t_\mathrm{P}^2} \ , \quad c = 1 \cdot \frac{\ell_\mathrm{P}}{t_\mathrm{P}} \ , \quad \hbar = 1 \cdot \frac{m_\mathrm{P}\ \ell_\mathrm{P}^2}{t_\mathrm{P}} \ .$$

Die Plancksche Länge ℓ_P ist die eindeutig bestimmte Länge, die sich aus Potenzen von G, c und $\hbar$ bilden lässt, also in $D = 4$

$$\ell_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.61 \cdot 10^{-33}\ \mathrm{cm} \quad .$$

(b) Bestimmen Sie in analoger Weise die Planck-Länge in D Dimensionen und drücken Sie diese durch die vier-dimensionale Planck-Länge ℓ_P aus. Verwenden Sie das Ergebnis aus (a) für $G^{(D)}$.

Nehmen Sie an, dass die $D - 4$ Extradimensionen zu einem Torus kompaktifiziert sind. Am Beispiel einer konstante Massenverteilung auf dem Torus im Ursprung der drei ausgedehnten räumlichen Dimensionen kann man leicht zeigen, dass die vier-dimensionale- und die D-dimensionale Gravitationskonstante wie folgt zusammenhängen (In den ausgedehnten Dimensionen erscheint diese Massenverteilung als Punktmasse im Ursprung):

$$\frac{G^{(D)}}{G} = V_{extr.} = \ell_c^{D-4} \quad ,$$

wobei ℓ_c die Länge der kompaktifizierten Dimensionen ist.

(c) Bestimmen Sie damit und den obigen Ergebnissen die Länge der Extradimensionen ℓ_c für gegebene Planck-Längen ℓ_P und $\ell_\mathrm{P}^{(D)}$. Wieviele Extradimensionen benötigen Sie mindestens um bei einer Planck-Länge[2] $\ell_\mathrm{P}^{(D)} = 10^{-18}$ cm eine realistische Größe für diese zu erhalten?

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer

[2]Aktuelle Beschleunigerexperimente können Abstände bis zu 10^{-16} cm auflösen. Hierbei wurden bisher keine Anzeichen für Extradimensionen gefunden.